

3AA

Prof. Dr. Wolfgang P. Kowalk

Universität Oldenburg

WS 2005/2006

3AA

- Einführung in maschinennahe Programmierung
 - (siehe Hilfe und Beispiel in 3AA)
 - Je Zeile ein Maschinenbefehl (Anweisung)
 - Ausführung nacheinander
 - Abweichung von der Reihenfolge durch Sprung (goto)
 - Marken sind (ganze) Zahlen!
 - Werte, Adressen, Anweisungen sind Zahlen!
 - Marke kann Adresse (Speicherzelle) oder Wert sein!

3AA

- Einfache Schleife
 - Bedingter Rücksprung an Schleifenende
 - **summe** zählt Anzahl der Schleifendurchläufe

```
1          // einfache Schleife
2
3          nop
4          adr summe := con 0      // Anfangswert
5          adr anzahl := con 10   // Anzahl d. Durchläufe
6 Start    adr summe := val summe + con 1 // Rücksprung
7          adr anzahl := val anzahl - con 1 // zähle
8          if val anzahl > con 0 then goto con Start
9          stop
10 summe   con 0
11 anzahl  con 10
```

3AA

- Einfache Schleife
 - Bedingter Rücksprung an Schleifenende
 - **summe** zählt Anzahl der Schleifendurchläufe
 - Kurzbefehle: +=, -=, *=, /=, ...
 - `adr summe := con 0`

```
1          // einfache Schleife, Kurzbefehle
2
3          nop
4          adr summe := con 0          // Anfangswert
5          adr anzahl := con 10       // Anzahl d. Durchläufe
6 Start    adr summe := con 0        // Rücksprung, increm.
7          adr anzahl -= con 1       // decrement anzahl
8          if val anzahl > con 0 then goto con Start
9          stop
10 summe    con 0
11 anzahl   con 10
```

3AA

- Einfache Schleife mit Eingangsabfrage
 - Bedingter Sprung zum Ende an Schleifenanfang
 - Unbedingter Sprung zum Anfang der Schleife

```
1          // Einfache Schleife mit Eingangsabfrage
2
3          nop
4          adr anzahl := con 10 // Anzahl
5 Start   if val anzahl <= con 0 then goto con Ende
6         adr summe += con 1    // Schleifenanfang, tue was
7         adr anzahl -= con 1  // zähle Anzahl
8         goto con Start
9 Ende    stop
10 anzahl con 10
11 summe  con 0
```

3AA

- Einfache Schleife mit Eingangsabfrage
 - Unbedingter Sprung von Schleifenanfang zum ende
 - Bedingter Rücksprung an Schleifenende
 - Nur ein Sprung je Schleifendurchlauf

```
1          // Einfache Schleife mit Eingangsabfrage
2          // Nur ein Sprung je Schleifendurchlauf
3          nop
4          adr summe := con 0          // Anfangswert
5          adr anzahl := con 10       // Anzahl d. Durchläufe
6          goto con Start            // springe zurück
7 Weiter   adr summe += con 1        // Rücksprung, increm.
8          adr anzahl -= con 1       // decrementiere anzahl
9 Start    if val anzahl > con 0 then goto con Weiter
10         stop
11 anzahl
12 summe
```

3AA

- Gleitpunktzahlen
 - Anzeige einer Gleitpunktzahl
 - wert1 con 1.0
 - Arithmetische Operationen mit GPZ: +f, -f, *f, /f
 - adr wert := val wert +f con 1.0
 - adr wert +f= con 1.0

```
1 // Polynomschleife 1. Grades
2
3 nop
4 Start adr wert1 +f= val addend
5 if val wert1 < con 1000.0 then goto con Start
6 Ende stop
7 wert1 con 0.0
8 addend con 2.0
```

3AA

- Polynomschleife 1. Grades
- Nach k-tem Durchlauf: $wert1 + k * Addend$

```
1          // Polynomschleife 1. Grades
2
3          nop
4 Start    adr wert1 +f= val addend
5          if val wert1 < con 1000.0 then goto con Start
6          stop
7 wert1    con 0.0
8 addend   con 2.0
```


3AA

- Polynomschleife 2. Grades
- Nach k-tem Durchlauf
 - $wert2 == a*k^2+b*k+c$

```
1          // Polynomschleife 2. Grades
2
3          nop
4 Start   adr wert2 +f= val wert1
5         adr wert1 +f= val addend
6         if val wert2 < con 1000.0 then goto con Start
7         stop
8 wert1   con 1.0 // 1 3 5 7
9 wert2   con 0.0 // 0 1 4 9 16
10 addend con 2.0
```

3AA

- Polynomschleife 3. Grades
- Nach k-tem Durchlauf
 - $wert3 == a*k^3 + b*k^2 + c*k + d$

```
1          // Polynomschleife 3. Grades
2
3          nop
4 Start    adr wert3 +f= val wert2
5          adr wert2 +f= val wert1
5          adr wert1 +f= val addend
6          if val wert3 < con 10000.0 then goto con Start
7          stop
8 addend   con 6.0
9 wert1    con 6.0 // 6 12 18 ..
10 wert2   con 1.0 // 1 7 19 37 ..
11 wert3   con 0.0 // 0 1 8 27 64
```

3AA

- Konstruktion von Polynomschleifen
- Nach k-tem Durchlauf
 - $wert3 == 2*k^3 - k^2 + k - 3$ (= 0, -1, 6, 45)

```
1          // Polynomschleife 3. Grades
2
3          nop
4 Start    adr wert3 +f= val wert2
5          adr wert2 +f= val wert1
6          adr wert1 +f= val addend
7          if val wert3 < con 10000.0 then goto con Start
8          stop
9 wert3    con 0.0      // 0   -1   6   45
10 wert2   con -1.0     // -1   7   39
11 wert1   con 8.0      // 8    32
12 addend  con 24.0     // 24
```

3AA

- Polynomschleifen
 - Folgen von Polynomwerten lassen sich durch Polynomschleifen konstruieren
 - Parameter durch Differenzenrechnung bestimmbar
 - Beweis durch Polynomeigenschaft
 - Jedes Polynom p vom Grad k ist durch $k+1$ Wertepaare $(x_i, p(x_i))$ eindeutig bestimmt, wenn $x_i \neq x_j, i \neq j$.
 - Nur Addition als Operator
 - *Babbage's Differential Engine*

3AA

- Lineare Schleifen 1. Grades
 - Schleifenrumpf
 - `wert1 := 2*wert1`
 - Nach k-tem Durchlauf
 - `wert1k == 2k`
 - Nicht mehr polynomial (k^2), sondern exponentiell (2^k)!

```
1          // Lineare Schleife 1. Grades
2
3          nop
4 Start    adr wert1 := val wert1 *f val a
6          if val wert1 < con 10000.0 then goto con Start
7          stop
8 wert1    con 1.0
9 a        con 2.0
```

3AA

- Allgemeine Lineare Schleifen 1. Grades
 - Schleifenrumpf
 - `wert1 := a1*wert1 + b1`
 - Nach k-tem Durchlauf
 - `wert1 == wert10*ak + b1*(a1k-1)/(a1-1)`
 - $w_k = w_0 \cdot a^k + b \cdot \frac{a^k - 1}{a - 1}$.

```
1          // Lineare Schleife 1. Grades
2
3          nop
4 Start    adr wert1 *f= val a1
5          adr wert1 +f= val b1
6          if val wert1 < con 10000.0 then goto con Start
7          stop
8 wert1    con 1.0
9 a1       con 2.0
10 b1      con 1.0
```

3AA

- Allgemeine Lineare Schleifen 1. Grades

$$w_1 = w_0 \cdot a + b.$$

$$w_2 = w_0 \cdot a^2 + b \cdot (a+1) = w_0 \cdot a^2 + (w_1 - w_0 \cdot a) \cdot (a+1),$$

$$(w_1 - w_0) \cdot a + w_1 - w_2 = 0.$$

$$a = \frac{w_2 - w_1}{w_1 - w_0}, \quad b = w_1 - w_0 \cdot a = w_1 + w_0 \cdot \frac{w_2 - w_1}{w_0 - w_1}$$

```
1          // Lineare Schleife 1. Grades
2
3          nop
4 Start    adr wert1 *f= val a1
5          adr wert1 +f= val b1
6          if val wert1 < con 10000.0 then goto con Start
7          stop
8 wert1    con 1.0 // 1 3 7
9 a1       con 2.0 // a1 = (7-3)/(3-1) = 2
10 b1      con 1.0 // b1 = 3 - 1*2 = 1
```

3AA

- Allgemeine Lineare Schleifen 1. Grades

$$w_1 = w_0 \cdot a + b,$$

$$w_2 = w_1 \cdot a + b.$$

$$a = \frac{w_2 - w_1}{w_1 - w_0}, \quad b = w_1 - w_0 \cdot a = w_1 + w_0 \cdot \frac{w_2 - w_1}{w_0 - w_1}$$

```
1          // Lineare Schleife 1. Grades
2
3          nop
4 Start    adr wert1 *f= val a1
5          adr wert1 +f= val b1
6          if val wert1 < con 10000.0 then goto con Start
7          stop
8 wert1    con 1.0 // 1 3 7
9 a1       con 2.0 // a1 = (7-3)/(3-1) = 2
10 b1      con 1.0 // b1 = 3 - 1*2 = 1
```


3AA

- Allgemeine Lineare Schleifen 2. Grades

- Schleifenrumpf

- `wert1 := a1*wert1 + b1*wert2 + c1`
- `wert2 := a2*wert1 + b2*wert2 + c2`

- Beispiel: Fibonacci-Zahlen

- $f_0=0, f_1=1, f_k=f_{k-1}+f_{k-2}$.
- `wert1 := wert1 + wert2`
- `wert2 := wert1 - wert2`

```
1          // Lineare Schleife 2. Grades
2          // Fibonacci-Zahlen
3
4          nop
5 Start    adr fib2 := val fib2 + val fib1
6          adr fib1 := val fib2 - val fib1
7          if val fib2 < con 10000 then goto con Start
8          stop
9 fib2     con 1
10 fib1    con 0
```

3AA

- Fibonacci-Zahlen

- $f_0=0, f_1=1, f_k=f_{k-1}+f_{k-2}$.

- Allgemeine Lösung $f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$

Beweis: Durch Mathematische Induktion

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 1 = 0$$

$$\begin{aligned} f_k + f_{k+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \frac{(1-\sqrt{5})^2}{4} \right) = f_{k+2}. \end{aligned}$$

3AA

- Allgemeine Lineare Schleifen 2. Grades

- Allgemeine Lösung

- $$\begin{aligned} v_1 &= v_0 \cdot a_1 + w_0 \cdot b_1 + c_1, & v_1 - v_2 &= (v_0 - v_1) \cdot a_1 + (w_0 - w_1) \cdot b_1, \\ v_2 &= v_1 \cdot a_1 + w_1 \cdot b_1 + c_1, & v_3 - v_2 &= (v_2 - v_1) \cdot a_1 + (w_2 - w_1) \cdot b_1. \\ v_3 &= v_2 \cdot a_1 + w_2 \cdot b_1 + c_1, \end{aligned}$$

$$\frac{v_1 - v_2}{w_0 - w_1} = \frac{v_0 - v_1}{w_0 - w_1} \cdot a_1 + b_1, \quad \frac{v_1 - v_2}{w_0 - w_1} - \frac{v_3 - v_2}{w_2 - w_1} = \left(\frac{v_0 - v_1}{w_0 - w_1} - \frac{v_2 - v_1}{w_2 - w_1} \right) \cdot a_1.$$

$$\frac{v_3 - v_2}{w_2 - w_1} = \frac{v_2 - v_1}{w_2 - w_1} \cdot a_1 + b_1.$$

$$a_1 = \left(\frac{v_1 - v_2}{w_0 - w_1} - \frac{v_3 - v_2}{w_2 - w_1} \right) / \left(\frac{v_0 - v_1}{w_0 - w_1} - \frac{v_2 - v_1}{w_2 - w_1} \right),$$

$$b_1 = \frac{v_1 - v_2 + (v_1 - v_0) \cdot a_1}{w_0 - w_1},$$

$$c_1 = v_1 - v_0 \cdot a_1 - w_0 \cdot b_1.$$

3AA

- Allgemeine Lineare Schleifen 2. Grades
- Allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(\frac{v_1 - v_2}{w_0 - w_1} - \frac{v_3 - v_2}{w_2 - w_1} \right) / \left(\frac{v_0 - v_1}{w_0 - w_1} - \frac{v_2 - v_1}{w_2 - w_1} \right) = \\ &= \frac{v_1 \cdot w_2 - v_1 \cdot w_1 - v_2 \cdot w_2 + v_2 \cdot w_1 - v_3 \cdot w_0 + v_3 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_0 - v_2 \cdot w_1}{v_0 \cdot w_2 - v_0 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_2 + v_1 \cdot w_1 - v_2 \cdot w_0 + v_2 \cdot w_1 + v_1 \cdot w_0 - v_1 \cdot w_1} = \\ &= \frac{v_1 \cdot w_2 - v_1 \cdot w_1 - v_2 \cdot w_2 - v_3 \cdot w_0 + v_3 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_0}{v_0 \cdot w_2 - v_0 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_0 + v_2 \cdot w_1 + v_1 \cdot w_0} = \\ &= \frac{v_1 \cdot (w_2 - w_1) + v_2 \cdot (w_0 - w_2) + v_3 \cdot (w_1 - w_0)}{v_0 \cdot (w_2 - w_1) + v_1 \cdot (w_0 - w_2) + v_2 \cdot (w_1 - w_0)}, \end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{v_1 - v_2 + (v_1 - v_0) \cdot a_1}{w_0 - w_1},$$

$$c_1 = v_1 - v_0 \cdot a_1 - w_0 \cdot b_1.$$

3AA

- Allgemeine Lineare Schleifen 2. Grades

$$w_1 = v_1 \cdot a_2 + w_0 \cdot b_2 + c_2,$$

$$w_2 = v_2 \cdot a_2 + w_1 \cdot b_2 + c_2,$$

$$w_3 = v_3 \cdot a_2 + w_2 \cdot b_2 + c_2,$$

$$w_1 - w_2 = (v_1 - v_2) \cdot a_2 + (w_0 - w_1) \cdot b_2,$$

$$w_3 - w_2 = (v_3 - v_2) \cdot a_2 + (w_2 - w_1) \cdot b_2.$$

$$\frac{w_1 - w_2}{w_0 - w_1} = \frac{v_1 - v_2}{w_0 - w_1} \cdot a_2 + b_2,$$

$$\frac{w_3 - w_2}{w_2 - w_1} = \frac{v_3 - v_2}{w_2 - w_1} \cdot a_2 + b_2.$$

$$\frac{w_1 - w_2}{w_0 - w_1} - \frac{w_3 - w_2}{w_2 - w_1} = \left(\frac{v_1 - v_2}{w_0 - w_1} - \frac{v_3 - v_2}{w_2 - w_1} \right) \cdot a_2.$$

$$a_2 = \left(\frac{w_1 - w_2}{w_0 - w_1} - \frac{w_3 - w_2}{w_2 - w_1} \right) / \left(\frac{v_1 - v_2}{w_0 - w_1} - \frac{v_3 - v_2}{w_2 - w_1} \right),$$

$$b_2 = \frac{w_1 - w_2 + (v_2 - v_1) \cdot a_2}{w_0 - w_1},$$

$$c_2 = w_1 - v_1 \cdot a_2 - w_0 \cdot b_2.$$

3AA

- Allgemeine Lineare Schleifen 2. Grades

$$\begin{aligned} a_2 &= \left(\frac{w_1 - w_2}{w_0 - w_1} - \frac{w_3 - w_2}{w_2 - w_1} \right) / \left(\frac{v_1 - v_2}{w_0 - w_1} - \frac{v_3 - v_2}{w_2 - w_1} \right) = \\ &= \frac{w_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot w_1 - w_2 \cdot w_2 + w_1 \cdot w_2 - w_3 \cdot w_0 + w_0 \cdot w_2 + w_1 \cdot w_3 - w_1 \cdot w_2}{v_1 \cdot w_2 - v_1 \cdot w_1 - v_2 \cdot w_2 + v_2 \cdot w_1 - v_3 \cdot w_0 + v_3 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_0 - v_2 \cdot w_1} = \\ &= \frac{w_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot w_1 - w_2 \cdot w_2 - w_3 \cdot w_0 + w_0 \cdot w_2 + w_1 \cdot w_3}{v_1 \cdot w_2 - v_1 \cdot w_1 - v_2 \cdot w_2 - v_3 \cdot w_0 + v_3 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_0} = \\ &= \frac{w_1 \cdot (w_2 - w_1) + w_2 \cdot (w_0 - w_2) + w_3 \cdot (w_1 - w_0)}{v_1 \cdot (w_2 - w_1) + v_2 \cdot (w_0 - w_2) + v_3 \cdot (w_1 - w_0)}, \end{aligned}$$

$$b_2 = \frac{w_1 - w_2 + (v_2 - v_1) \cdot a_2}{w_0 - w_1},$$

$$c_2 = w_1 - v_1 \cdot a_2 - w_0 \cdot b_2.$$

3AA

- Allgemeine Lineare Schleifen 2. Grades
 - Sind $v_0, v_1, v_2, v_3, w_0, w_1, w_2, w_3$, gegeben, so berechnet die Schleife mit dem Rumpf
$$\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a1} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{b1} + \mathbf{c1}$$
$$\mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a2} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{b2} + \mathbf{c2}$$
die entsprechenden Wertefolgen $\{v_k\}$ und $\{w_k\}$, wobei

$$a_1 = \frac{v_1 \cdot (w_2 - w_1) + v_2 \cdot (w_0 - w_2) + v_3 \cdot (w_1 - w_0)}{v_0 \cdot (w_2 - w_1) + v_1 \cdot (w_0 - w_2) + v_2 \cdot (w_1 - w_0)},$$

$$b_1 = \frac{v_1 - v_2 + (v_1 - v_0) \cdot a_1}{w_0 - w_1}, \quad a_2 = \frac{w_1 \cdot (w_2 - w_1) + w_2 \cdot (w_0 - w_2) + w_3 \cdot (w_1 - w_0)}{v_1 \cdot (w_2 - w_1) + v_2 \cdot (w_0 - w_2) + v_3 \cdot (w_1 - w_0)},$$

$$c_1 = v_1 - v_0 \cdot a_1 - w_0 \cdot b_1.$$

$$b_2 = \frac{w_1 - w_2 + (v_2 - v_1) \cdot a_2}{w_0 - w_1},$$

$$c_2 = w_1 - v_1 \cdot a_2 - w_0 \cdot b_2.$$

3AA

- Allgemeine Lineare Schleifen 2. Grades
 - Beispiel
 - Sei $v_k = 0, 1, 0, -1$ und $w_k = 3, 1, 2, 4$, so werden
 - $a_1 = 3, b_1 = 1, c_1 = -5$ und $a_2 = -5/3, b_2 = 1/3, c_2 = 5/3$